Reconstrucción de Atractores.

Juan Pablo Agnelli - Andrés Barrea

1. Introducción.

En varias disciplinas tales como la biología, metereología, química y física entre otras, aparecen frecuentemente fenómenos para los cuales interesa conocer sus dinámicas y sus futuros comportamientos. Para esto, usualmente se utilizan ecuaciones apropiadas que describan los fenómenos en términos matemáticos y a partir de estas predecir la evolución temporal del proceso. Por ejemplo, en biología se han estudiado las variaciones en el tamaño de las poblaciones correspondientes a dos especies que habitan en un mismo medio y compiten entre sí, debido a que una de las especies es la presa y la otra su predador. Las ecuaciones que modelan este fenómeno son conocidas como ecuaciones de Lotka-Volterra.

Está claro que muchos de estos fenómenos pueden contar con una gran cantidad (a veces decenas) de variables que interactúan en su proceso y modelar esto se convierte en algo impracticable. Por lo tanto la idea es tratar de comprender la dinámica central del fenómeno y sólo considerar el conjunto de variables que son básicas en el proceso. Así por ejemplo, en el proceso de competencia entre dos especies varios factores como lo son el tamaño del medio en el que habitan las dos especies, la cantidad de alimento disponible para la presa, condiciones del clima, época del año, etc influyen de manera directa o indirecta en el proceso y sólo algunos de estos factores son tenidos en cuenta a la hora de modelar el proceso.

Pese a la simplificación hecha para modelar estos fenómenos, muchas veces las ecuaciones que determinan el sistema resultan muy complejas. De esta manera, bajo ciertas hipótesis sobre las ecuaciones, el comportamiento de estos sistemas varia desde converger a un estado particular, llamado punto de equilibrio, converger a un conjunto de estados que se repiten periodicamente, denominado ciclo límite o en otras ocasiones tener un comportamiento muy irregular. Estos conjuntos a los que convergen las soluciones de los sistemas son llamados atractores.

El problema que surge a menudo cuando se quiere describir a grandes rasgos la dinámica central del fenómeno en cuestión, se manifiesta en el hecho de no disponer en forma cuantitativa todas las variables básicas necesarias y sólo se cuenta con alguna o una de ellas. Frecuentemente, los científicos tienen sólo la posibilidad de realizar observaciones parciales del fenómeno o en otros casos realizar mediciones de la totalidad del fenómeno resulta muy costoso por lo cual se limitan a observar parte de este. La pregunta que se genera en estos casos es: ¿se puede conocer la dinámica de un sistema sin conocer todas las variables que lo determinan?

Para entender mejor la situación suponga estar estar interesado en estudiar el comportamiento y evolución de cierto fenómeno en el cual interactuán n variables, las cuales determinan cada estado del fenómeno en cuestión.

Ahora lo que en realidad se observa es sólo una de las n variables. Es decir, toda la información que se tiene acerca del fenómeno son mediciones de una de las n variables. Por lo tanto, se cuenta con una sucesión $\{x_i\}$ de valores numéricos tomados en distintos tiempos; esta sucesión numérica se denomina serie de tiempo correspondiente a la variable observable. Por ejemplo, en el proceso de competencia de especies podría suceder que solo se cuente con mediciones del tamaño de la población de una de las dos especies, supongamos la presa.

Entonces en esta situación los interrogantes que surgen son:

¿Se puede aprovechar de alguna manera la información que uno dispone?

¿Son los datos de las mediciones suficientes para comprender la evolución del fenómeno?

¿Contienen estos datos suficiente información como para reconstruir la dinámica del sistema?

En otras palabras, el interrogante central es:

¿Se puede conocer la dinámica de un sistema sin conocer todas las variables que lo determinan?

La respuesta es afirmativa. Bajo ciertas hipótesis sobre el sistema y basándose en el teorema de Takens, que más adelante será enunciado, resulta posible a partir de las mediciones reconstruir la dinámica del sistema original y así poder conocer su evolución. Con lo cual, teniendo información sobre sólo una de las variables del sistema se puede inferir el comportamiento del sistema como si se tuviera la totalidad de la información .

A continuación se explicarán brevemente algunos de los conceptos básicos necesarios para poder comprender de mejor manera el problema planteado. Luego se explicará una estrategia para resolver el problema basada en los resultados de Takens. Y por último,se mostrarán ejemplos que reflejan la eficacia de la estrategia propuesta.

2. Conceptos Básicos.

2.1. Sistemas Dinámicos.

Esencialmente un sistema dinámico consiste en un conjunto de posibles estados que evolucionan en el tiempo, junto a una regla que define el presente estado en términos del estado anterior. Además se requiere que la regla que define los estados sea determinística, lo cual significa que se puede determinar el estado actual únicamente de los estados anteriores.

Estado significa toda la información necesaria para poder determinar que hará o como evolucionará el sistema. Por ejemplo, consideremos una piedra en caída libre, el estado en este caso consiste de dos números. El conocimiento de su altura y su velocidad en un cierto tiempo es suficiente para determinar donde estará la piedra un segundo más tarde. En este caso la regla que define el siguiente estado corresponde a la ley de Newton $F = ma$.

La transición de un estado al siguiente se puede dar de dos formas: una consiste en considerar el tiempo como discreto y la otra es consideralo como continuo.

En el primer caso la transición del estado x_n, correspondiente al tiempo t_n, al estado x_{n+1} correspondiente al tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, se realiza a través de un mapa f de modo tal que $x_{n+1} = f(x_n)$. Esto es, el resultado x_n en el tiempo t_n generado por la regla f es utilizado como el valor de entrada para determinar el resultado x_{n+1} correspondiente al siguiente paso de tiempo. Por un mapa f entedemos una función cuyo dominio e imagen sean el mismo conjunto. Por ejemplo, consideremos el mapa $f{:}N \to N$ definido por $f(x) = 2x$ y supongamos que x_n representa el tamaño de la población de una cierta especie en el n-ésimo año. Entonces la población en el año siguiente, $n + 1$, es $x_{n+1} = f(x_n) = 2x_n$, o sea el doble de la población que había el año anterior.

Por lo tanto, un mapa describe la evolución temporal de un sistema expresando los sucesivos estados en función de los estados anteriores. Asi iterar el mapa representa la evolución del sistema actualizada cada ciertos pasos de tiempos (años, meses, días, etc).

Dado un punto x la órbita de x es el conjunto $\{x, f(x), f(x)^2, ...\}$ y x se llama valor inicial de la órbita.Un punto x se dice fijo si $x = f(x)$.

El segundo caso de transición considerado, se obtiene del anterior tomando cada vez más cortos los pasos Δt. Haciendo que los pasos de tiempo Δt en que se actualiza el sistema sean cada vez más próximos a cero, en el límite se obtiene una ecuación diferencial. En este caso la regla en vez de expresar el estado actual como función de los anteriores, expresa que la razón de cambio del estado actual es una función de este mismo. Por ejemplo, si $x(t)$ es la población en el tiempo t, la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x) = ax$$

expresa que la razón de cambio de la población es proporcional a esta misma. La ecuación describe un crecimento de la población si $a > 0$ y un decrecimiento si $a < 0$.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son funciones de una única variable independiente, que usualmente se denota por t. Esta variable t a menudo representa el tiempo y la solución que se busca, $x(t)$, usualmente representa alguna cantidad física, especie química, especie biologica que cambia con el transcurso del tiempo. La variable que representa el estado x se denomina variable dependiente.

En el caso de contar con más de una variable dependiente, supongamos n variables dependientes, se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales. En este caso cada estado esta representado por un vector de la forma $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y para cada variable dependiente x_i se tiene asociada un ecuación diferencial ordinaria $\dot{x_i} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. De esta manera se obtiene el sistema:

$$\dot{x_1} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\dot{x_2} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x_n} = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

de n ecuaciones diferenciales ordinarias. Este sistema se puede reescribir como

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$$

donde $\boldsymbol{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es el vector de estados y $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$

En el ejemplo de la piedra en caída libre, la altura y la velocidad son las variables dependientes que conforman cada estado del sistema y el tiempo es la variable independiente.

En todo lo que resta denotaremos por $\dot{x} = f(x)$ a una ecuación diferencial ordinaria como así también a un sistema de ecuaciones difrenciales.

Una sistema/ecuación diferencial ordinaria se dice autónoma si la variable independiente no aparece explícitamente en la ecuación diferencial. Es decir, si la ecuación es de la forma $\dot{x} = f(x)$, o sea la función f no depende explícitamente de la variable t. Un ejemplo de ecuación diferencial no autónoma es $\dot{x} = bx + \sin(t)$.

Otro concepto que también tenemos que tener en cuenta es el de linealidad de una ecuación diferencial. Una ecuación diferencial se dice lineal si la función f es lineal x, o sea en las variables dependientes, sino la ecuación se dice no lineal. Por ejemplo, la ecuación $\dot{x} = ax(1 - x)$ es no lineal debido al termino ax^2. Esta ecuación es conocida como ecuación logística.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo se tiene asociado el flujo F, el cual es una función dependiente del tiempo t y de los estados o valores iniciales x_0, y representa el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones. Es decir $F(t, x_0)$ es el valor en el tiempo t de la solución cuyo valor inicial es x_0.

Una solución particular $F(t, x_0) = F_{x_0}(t)$ del sistema de ecuaciones se llama órbita y es la que describe el conjunto de estados que siguen o quizás preceden (tiempo menor que cero), al estado inicial x_0.

2.2. Espacio de Fases.

Una manera de representar y facilitar la comprensión de un sistema dinámico se logra a través del espacio de fases. Este consiste en la construcción de un espacio que tiene tantas dimensiones como el número de variables necesarias para especificar el estado del sistema dinámico dado (i.e. el número de variables dependientes que determinan el sistema de ecuaciones diferenciales). Cada dirección o eje coordenado representa una de las variables que componen el sistema. Por ejemplo en el caso de la piedra en caída libre el espacio de fases es $\Re^2$, un eje corresponde a la variable altura y el otro a la variable velocidad.

Graficando el valor numérico de cada una de las variables en un tiempo dado, el punto que se obtiene proporciona una descripción del estado del sistema en ese tiempo, o sea cada punto en el espacio representa un estado particular del sistema dinámico. La evolución de una solución particular (órbita) se representa por una curva o trayectoria, la cual describe los estados posteriores al escogido inicialmente x_0.

Esta manera geométrica de representar el sistema permite realizar una descripción cualitativa de la evolución temporal del modelo a estudiar.

2.3. Sistema Disipativo y Atractor de un Sistema.

Básicamente un sistema dinámico se dice disipativo si el volumen de cualquier conjunto en el espacio de fases se disminuye con el transcurso del tiempo. Para entender mejor este concepto tomemos un conjunto de puntos S_0 en el espacio de fases, este conjunto tiene un volumen que lo denotamos por V_0. Ahora considermos a todos los puntos pertenecientes a S_0 cada uno como condiciones iniciales de distintas trayectorias. Entonces dejando evolucionar el sistema durante un tiempo T tendremos que las trayectorias que se iniciaron en S_0 han evolucionado formando un nuevo conjunto S_T el que tiene un volumen V_T. Si para todo conjunto S_0 y para todo tiempo T vale que $V_0 > V_T$, osea el volumen en el espacio de fases se contrae bajo la acción del sistema de ecuaciones diferenciales, se dice que el sistema, que determinan estas ecuaciones diferenciales, es disipativo.

Por lo tanto, en todo sistema disipativo, si comenzamos con un conjunto "grande"de condiciones iniciales, las trayectorias eventualmente convergen a un conjunto de volumen cada vez menor hasta llegar a formar un conjunto de volumen nulo.

Un objeto importante en el estudio de los sistemas dinámicos y que en particular caracteriza a los sistemas disipativos, es el de atractor. Un atractor A es un conjunto de volumen cero en el espacio de fases que satisface:

1. A es un conjunto invariante: cualquier trayectoria que comienza en A permanece en A para todo tiempo.

2. A atrae un conjunto de condiciones iniciales, es decir existe un conjunto U, que contiene a A, tal que si $x(0) \in U$ la distancia de $x(t)$ a A tiende a 0 cuando t tiende a ∞. Esto significa que A atrae todas las trayectorias que comienzan suficientemente cerca a este. El mayor U que satisface esta propiedad se llama base del atractor.

3. A es minimal: no existe ningún subconjunto propio de A que satisface las condiciones (1) y (2).

Existen diferentes tipos de atractores dependiendo de la dimensión del sistema en el espacio de fases (cantidad de variables dependientes que conforman el sistema). Por ejemplo, una solución acotada de una ecuación diferencial autónoma en la recta debe converger a un punto, el cual se denomina punto de equilibrio atractivo. Para ecuaciones diferenciales autónomas en el plano las soluciones acotadas pueden converger a un punto de equilibrio y además un nuevo tipo de comportamiento es posible: pueden converger a una curva cerrada denominada órbita periódica o ciclo límite. Por último, para sistemas de ecuaciones con 3 o más variables dependientes, los comportamiento de las soluciones son variados y existen conjuntos de diversas formas que atraen a las trayectorias de estos sistemas.

3. Reconstrucción de Atractores - Aspectos Teóricos.

Supongamos estar interesados en estudiar la dinámica y evolución de un fenómeno en el cual interacatuan m variables, o sea m variables dependientes del tiempo determinan cada estado X, es decir $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t))$. Este fenómeno en términos matemáticos estará representado por un sistema de ecuaciones que en un principio es desconocido. En realidad la información que se tiene sobre el sistema son mediciones de una de las m variables, asumamos que es la primera $x_1(t)$. Por lo tanto se tienen valores $s_1 = x_1(\tau)$, $s_2 = x_1(2\tau)$, $s_3 = x_1(3\tau), \ldots, s_k = x_1(k\tau)$ tomados en intervalos de longitud τ, esta sucesión de mediciones se llama serie de tiempo.

Con los valores s_j se construyen los llamados vectores con retardo definidos por:

$$Y_l = (s_l, s_{l-\tau}, \ldots, s_{l-2d\tau})$$

al valor τ se lo denomina tiempo de retardo y el valor d corresponde a la dimensión del atractor del sistema. Por ejemplo, si el atractor es un estado particular, el cual representa un punto en el espacio de fases (espacio m-dimensional) este tiene dimensión cero, si en cambio el atractor es un conjunto de estados que estan representados por una curva o trayectoria, la dimensión de este es uno. Cabe señalar que existe una definición rigurosa y general sobre la dimensión de un conjunto, la cual es demasiada compleja y hasta permite valores que no sean enteros. Para nuestros ejemlos basta con pensar que los atractores son objetos simples como un punto o una curva ya que a partir de estos se comprenderá mejor la teoría.

En definitiva nuestra situación es la siguiente; nos interesa estudiar un sistema en el cual cada estado $X(t)$ está determinado por las m variables $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$, de las cuales sólo conocemos $x_1(t)$ en ciertos tiempos (serie de tiempo). Ahora como dijimos que estado significa toda la información necesaria para poder determinar que hará o como evolucionará el sistema entonces no estamos en condiciones de averiguarlo, ya que sólo contamos con informacion sobre una de las variables que determinan cada estado particular. El interrogante que entoces surge es:

¿Se puede conocer la dinámica de un sistema sin conocer todas las variables que lo determinan?

La respuesta es: Sí.

La idea es reconstruir el atractor del sistema en cuestión, para esto el método más utilizado es el de coordenadas con retardo. Este consiste en graficar en $\Re^{2d+1}$ los vectores $Y_l = (s_l, s_{l-\tau}, \ldots, s_{l-2d\tau})$ para cada tiempo en que se disponen de acuerdo a los datos de la serie de tiempo. El siguiente teorema demostrado por Takens en 1981 da la respuesta al interrogante planteado.

Teorema de Takens: *La gráfica que se obtiene de los vectores de estado X en $\Re^m$ es* ***equivalente*** *a la gráfica dada por los vectores Y en $\Re^{2d+1}$ correspondiente al método de coordenadas con retardo.*

Por lo tanto, mediante el método de coordenadas con retardo se obtiene una reconstrucción del atractor en $\Re^k$ que resulta tener las misma "propiedades" que las del atractor original en $\Re^m$. Entonces la dinámica del sistema y su comportamiento se puede describir analizando la reconstrucción del atractor en $\Re^k$.

Así tenemos que a través del conocimiento de una de las variables del sistema se puede conocer su evolución y esto es tan exacto como el resultado que se obtendría si fuese posible tener el conocimiento de todas las variables que lo determinan.

Notas sobre el teorema.

Debemos tener en cuenta que el enunciado original del teorema tiene hipótesis más rigurosas sobre el sistema y cumpliendo con estas el resultado es básicamente el que se expresó anteriormente.

Algunos puntos que hay que resaltar del teorema original son:

• El teorema no brinda información sobre el valor preciso de τ, más aún en su enunciado está permitido cualquier valor de τ, pero esto sólo tiene sentido en el caso en que se posee una cantidad infinita de datos en la serie de tiempo, lo cual es algo inusual.

• Los datos de la serie de tiempo no tienen ruido, esto significa que no existe ningún tipo de error o perturbación de los valores tomados durante las mediciones, lo cual en la realidad es algo casi imposible ya que siempre existirá algún tipo de error en la medición ya sea por deficiencia del aparato de medición o por error humano.

• Lo que hemos expresado como equivalencia entre las gráficas del atractor original y la de su reconstrucción, en el teorema original está establecido como un homeomorfismo entre los dos conjuntos. Un homeomorfismo entre dos conjuntos básicamente significa que uno se obtiene através de una deformación continua del otro, esta deformación está determinada por una función que debe ser continua, biyectiva y tal que su inversa también sea continua. Cuando dos conjuntos se dicen homeomorfos se hace incapie en que más alla de la forma que tenga cada uno, los cojuntos tienen las mismas propiedades. Por ejemplo, dos conjuntos homeomorfos deben tener las mismas dimensiones; un segmento de recta en el plano es homeomorfo a un trozo de curva, pero no a un cuadrado. Un cuadrado por su parte es homeomorfo a un cíírculo.

4. Reconstrucción de Atractores - Ejemplos Numéricos.

Ejemplo 1: Consideremos un cuerpo de masa m colocado en el extremo de

un resorte, de constante k como se muestra en la siguiente figura: La ecuación que describe la posición del cuerpo de masa m es:

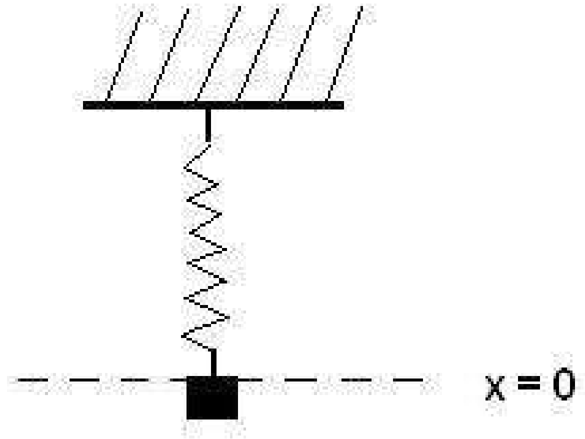
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \qquad (*)$$

donde el término $b\dot{x}$ representa la fuerza ejercida por la resistencia o roce con el aire, la cual usualmente es denominada fuerzade fricción.

Utilizando la definición de velocidad, $v(t) = \dot{x}(t)$, podemos reescribir la ecuación $(*)$ como un sistema de ecuaciones diferenciales en términos de la posición y velocidad, esto es:

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\frac{b}{m}v - \frac{k}{m}x,$$



Así queda bien claro que cada estado del sistema está determinado por la posición y la velocidad. Conociendo el valor de x y de v en un tiempo inicial $t^\star$ el sistema (**) determina de manera única los futuros estados.

Para simplificar la notación asumimos $m = k = b = 1$. De esta manera estamos en el caso de subamortiguación. Una vez que el cuerpo es apartado de su posición de equilibrio, este comienza a oscilar con una amplitud cada vez más pequeña hasta volver a la posición de equilibrio donde frenará y permanecerá definitivamente, o sea convergerá al estado determinado por el punto $(x, v) = (0, 0)$ en el espacio de fases.(Ver figura 1 (a))

Ahora supongamos que nuevamente estamos interesados en conocer la trayectoria del cuerpo sujeto al extremo del resorte. Pero en este caso no tenemos información acerca de k, m, b y la posición inicial desde donde comenzó a oscilar. Por lo tanto, no contamos con la ecuación (*). La única información que tenemos son mediciones de la velocidad $s_1 = v(\tau)$, $s_2 = v(2\tau)$, $s_3 = v(3\tau), \ldots, s_k = v(k\tau)$ tomadas en intervalos de longitud τ. Entonces, ¿ cómo podemos conocer la evolución del sistema?

Utilizando el método de coordenadas con retardo podemos reconstruir el atractor del sistema. Construyendo los vectores con retardo $Y_l = (s_l, s_{l-\tau})$ y graficándolos en $\Re^2$ se obtiene la reconstrucción del atractor.

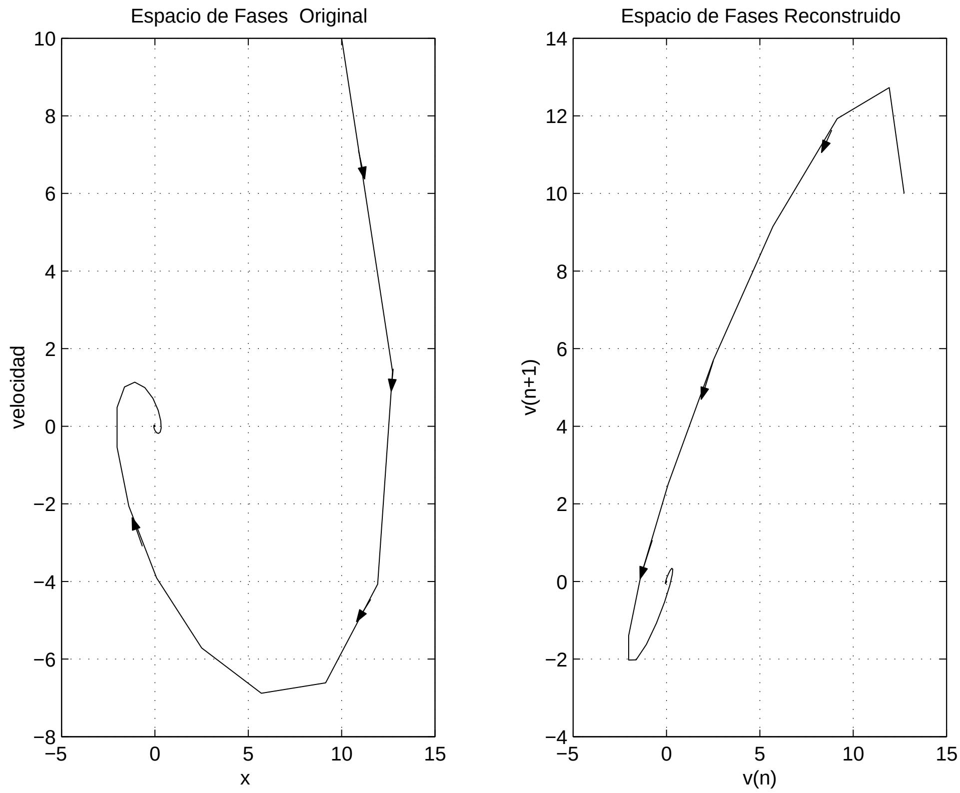


Figura 1: (a)Gráfico original. (b)Gráfico de la reconstrucción

Notemos que aunque las gráficas no sean idénticas si son equivalentes, en el sentido que anteriormente mencionamos. Además lo más importante es que se ve claramente la reconstrucción del hecho de que el sistema converge al estado $(0, 0)$. Es decir, a pesar de no conocer datos sobre la posición inicial del cuerpo, el valor de la masa, la constante del resorte k, etc, con sólo el conocimiento de la velocidad y basándonos en el gráfico 1 (b) podemos establecer que el sistema después de transcurrir un intervalo de tiempo (desconocido) terminará convergiendo a un estado de reposo o equilibrio, el cual en el gráfico está representado por el punto $(0,0)$. Este es justamente el resultado que se obtiene resolviendo el sistema original conociendo la totalidad de los parámetros.

En este ejemplo se refleja la eficacia del método de coordenadas con retardo para la reconstrucción del atractor del sistema.

Ejemplo 2:

El siguiente modelo matemático para describir las variaciones en el tamaño poblacional de dos especies que compiten entre sí, fue desarrollado por el biofísico estadounidense Alfred Lotka y por el distinguido matemático italiano Vito Volterra. Este modelo es conocido popularmente con el nombre Lotka-Volterra. Consideremos la situación en que dos especies interactúan entre sí debido a que una de las especies (el depredador) se alimenta de la otra (la presa), mientras que esta vive de otra fuente de alimento. Un clásico ejemplo lo constituyen los zorros y los conejos en un bosque cerrado; los zorros cazan a los conejos y estos se alimentan de la vegetación del bosque.

Cabe destacar que el modelo que se dará que incluye sólo dos especies no puede describir por completo las complejas relaciones entre especies que en realidad ocurren en la naturaleza. Factores como ...también deberian tenerse en cuenta. Sin embargo, el estudio de modelos simples es el primer paso hacia la comprensión de fenómenos más complicados.

Las poblaciones del depredador y de la presa en el instante t se denotarán por x e y respectivamente. Para construir el modelo de la interacción entre las dos especies, se asumen las siguientes suposiciones:

1. En ausencia del depredador, la presa crece con una razón proporcional a la población actual; por lo tanto $\dot{x} = ax$, $a > 0, \text{cuando}\, y = 0$.

2. En ausencia de la presa, el depredador se extingue; por lo tanto $\dot{y} = -cy$, $c > 0, \text{cuando}\, x = 0$.

3. El número de encuentros entre el depredador y la presa es proporcional al producto de sus poblaciones. Cada uno de esos encuentros tiende a favorecer el aumento de los depredadores y a inhibir el aumento de las presas. Por lo tanto, la razón de aumento de los depredadores se incrementa en un término de la forma γwy, mientras que la razón de aumento de las presas decrece en un término $-\alpha xy$, en donde γ y α son constantes positivas.

Como concecuencia de estas suposiciones, se tienen las ecuaciones:

$$\dot{x} = ax - \alpha xy = x(a - \alpha y)$$

$$\dot{y} = -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x)$$

Todas las constantes a, c, α, γ son positivas; a y c son la razón de aumento de las presas y el índice de mortalidad de los depredadores respectivamente. Por su parte α y γ son medidas del efecto de la interacción entre las dos especies.

Consideremos el caso particular con $a = 1, \alpha = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{4}$ y $\gamma = \frac{1}{4}$. Si nos restringimos al primer cuadrante $(x > 0, y > 0)$, o sea tenemos en cuenta poblaciones que inicialmente tienen algún individuo, resolviendo analíticamente el sistema de ecuaciones se obtiene para cualquier punto inicial, salvo el $(3, 2)$, que la solución correspondiente del sistema es una órbita cerrada, que se rrecorre en sentido antihorario y encierra al punto $(3, 2)$. Esta órbita representa la variación de la población w e y en el transcurso del tiempo.

Por su parte el punto $(3, 2)$ en este ejemplo representa una solución de equilibrio.

Si consideramos como condición inicial el punto $(1, 1)$ la trayectoria de la solución en el plano de fases es la de la figura 2 (a). La lectura que se debe hacer de esta grfica es la siguiente: si se parte de un estado en el que las poblaciones, del depredador y de la presa, son relativamente pequeñas, las presas aumentan primero porque hay poca caza de ellas; en seguida, con alimento abundante, también aumenta la población de los depredadores. Esto causa una cacería más intensa y el número de presas tiende a disminuir. Por último, al disminuir el suministro de alimento, la población de depredadores también disminuye y el sistema regresa a su estado original donde comienza nuevamente el ciclo.

Ahora supongamos que estamos en el caso en que tenemos poca información sobre el sistema. No conocemos la tasa de natalidad de las presas, ni la tasa de mortalidad de los depredadores, tampoco conocemos los valores α y γ correspondientes a la interacción entre las dos especies y mucho menos valores sobre el tamaño de la población de los depredadores. Por lo tanto, no contamos con el modelo de Lotka-Volterra para poder predecir como se comportarán los tamaños de las poblaciones con el transcurso del tiempo. Lo que si tenemos son mediciones del tamaño de la población de las presas $s_1 = x(\tau)$, $s_2 = x(2\tau)$, $s_3 = x(3\tau), \ldots, s_k = x(k\tau)$ tomadas en intervalos de longitud τ.

Entonces, si queremos saber como evolucionará este poceso con el transcurso del tiempo podemos utilizar el método de coordenadas con retardo. Construimos los vectores con retardo $Y_l = (s_l, s_{l-\tau})$ y los graficamos en $\Re^2$. La gráfica que se obtiene es la que se muestra en la figura 2 (b). Claramente se ve que la gráfica

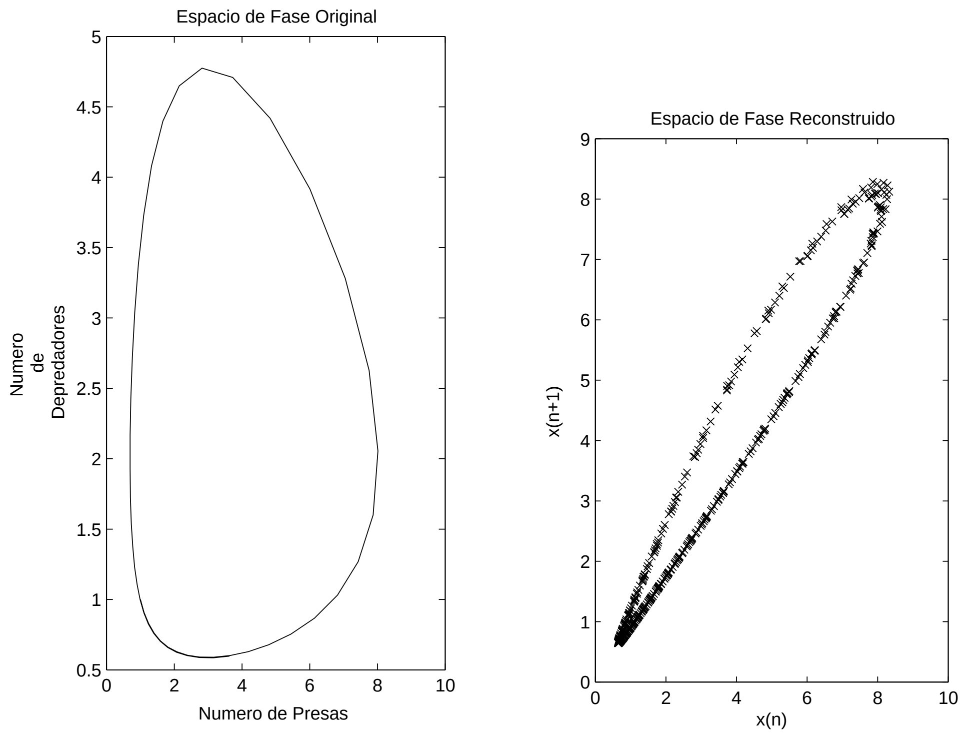


Figura 2: (a)Gráfico original. (b)Gráfico de la reconstrucción

del sistema original y la de la reconstrucción son equivalentes (con muestra definición de equivalencia). La reconstrucción establece que el sistema tiene una órbita cerrada, lo cual significa que las variables que lo componen son funciones periódicas en el tiempo. Por lo tanto, los tamaños de las poblaciones fluctuarń entre ciertos valores y en forma periódica, con lo cual queda descartado la posibilidad de que alguna de las dos especies se extinga y la otra crezca de manera exponencial.

Nuevamente a partir del conocimiento de sólo una de las variables que determinan el sistema se puede obtener, mediante el método de coordenadas con retardo, la reconstrucción del atarctor del sistema y con esta reconstrcción conocer su evolución y esto es tan exacto como el resultado que se obtendría si fuese posible tener el conocimiento de todas las variables que lo determinan.

Referencias

[1] **F. Takens**, *Lectures Notes in Mathematics*, in:D.A. Rand, L.S. Young (eds), Dynamical Systems and Turbulence, Vol 898, Springer, Berlin, 1981.

[2] **K.T. Alligood**, **T.D. Sauer** and **J.A. Yorke**, *CHAOS: An introduction to Dynamical Systems*, Springer, Berlin, 1996.

[3] **S.H. Strogatz**, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physiscs, Biology, Chemestry and Engineering*, Addison-Wesley, 1994.

[4] **J.P. Agnelli**, *Reconstrucción de Atractores Extraños (y no tanto)*, Trabajo Final Lic. en Matemática UNC, Diciembre 2004.

Juan Pablo Agnelli.
Universidad Nacional de Córdoba
aj@mate.uncor.edu

Andrés Barrea.
Universidad Nacional de Córdoba-CIEM
abarrea@mate.uncor.edu